エンドスコピー指標関係式について

大井 雅雄 *

東京大学大学院数理科学研究科，2017 年 2 月

概要

本稿ではエンドスコピー指標関係式が何かを説明する．またその具体例として，単純超尖点表現の場合には Hasse-Davenport の関係式と呼ばれる Gauss 和から成る古典的な等式が現れることを紹介する．

0　はじめに

p 進体 F 上の連結簡約群 $\mathbf{G}$ を考える．$\mathbf{G}$ に対する局所 Langlands 対応とは，$\mathbf{G}(F)$ の既約スムーズ表現という表現論的対象と $\mathbf{G}(F)$ の L パラメータという数論的対象の間に，自然な対応が存在することを主張する予想である．この予想を仮定することで L パラメータに関する自然な操作を既約スムーズ表現に関する非自明な操作に翻訳できる場合がある．そうして存在が示唆される表現論サイドの操作は総称して Langlands 関手性と呼ばれており，その一例が本稿で扱う「エンドスコピー持ち上げ」と呼ばれる操作である*1．

タイトルにあるエンドスコピー指標関係式とは，エンドスコピー持ち上げという表現論サイドの操作を，純表現論的に（局所 Langlands 対応の言葉を一見排除したかたちで）特徴付ける等式のことである．近年準分裂型古典群の場合にエンドスコピー持ち上げの存在が Arthur によって証明され，またそれとともに準分裂型古典群の局所 Langlands 対応が確立されるという大きな進展があった（[Art13]）．本稿ではまずこの Arthur の定理，すなわち準分裂型古典群に対するエンドスコピー持ち上げの存在，およびエンドスコピー指標関係式を，特殊直交群の場合を例にとって説明する．そしてその具体例として，単純超尖点表現と呼ばれる表現のエンドスコピー指標関係式が，Hasse-Davenport の関係式と呼ばれる Gauss 和の等式を含むことを紹介する．

謝辞

今回は城崎新人セミナーに参加させていただき，また講演の機会をいただきありがとうございました．素晴らしい集会を企画し運営してくださった運営委員の皆様に心より感謝いたします．そして集会中に色々な人からお話を聞くことができて大変ためになり，また刺激にもなりました．数学に関する様々なことを快く教えてくださった参加者の皆様と先生方に心より感謝いたします．それと蟹の皆様もありがとうございました．

記号

p を素数とする．p 進体（$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大）F に対し，整数環を $\mathcal{O}_F$，極大イデアルを $\mathfrak{p}_F$，剰余体を k_F とし，Weil 群を W_F で表す．また素元 ϖ_F および k_F の非自明加法的指標 ψ を一つ固定する．代数群 $\mathbf{G}$ に対してその中心を $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}$ と表し，F 値点 $\mathbf{G}(F)$ を G と略記する．サイズ N の単位行列は I_N と書く．

---

* masaooi@ms.u-tokyo.ac.jp

*1 p 進体上の簡約群の局所 Langlands 対応の定式化や，Langlands 関手性のその他の例などについては，[伊藤] および [三枝] に詳しくてとても分かりやすい解説があるので，是非とも参照されたい．

1　エンドスコピー持ち上げとエンドスコピー指標関係式

本節ではエンドスコピー持ち上げおよびエンドスコピー指標関係式の説明をする．但し記述の簡略化のため，一般の設定下での説明を諦めて，捻られた一般線型群と奇数次特殊直交群の場合に焦点を絞る．

$\mathbf{G}$ を F 上の偶数次一般線型群 GL_{2n} とする．また，反対角行列 J_N を

$$J_N = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ (-1)^{N-1} & & & \end{pmatrix}$$

と定め，$\mathbf{G}$ の F 上の外部自己同型 θ を $\theta(g) := J_{2n}{}^t g^{-1} J_{2n}^{-1}$ と定める．$\mathbf{H}$ を次の F 上の特殊直交群とする：

$$\mathbf{H} := \mathrm{SO}_{2n+1} := \{h \in \mathrm{GL}_{2n+1} \mid J_{2n+1}{}^t h^{-1} J_{2n+1}^{-1} = h,\, \det(h) = 1\}.$$

このとき $\mathbf{H}$ は $(\mathbf{G}, \theta)$ の**エンドスコピー群**と呼ばれるものの一種になっており，**Langlands 双対群**（以下，双対群と略記）の間に次のような関係性がある[*2]：一般に F 上の連結簡約群に対してその双対群が定まるが，$\mathbf{G}$ と $\mathbf{H}$ の双対群はそれぞれ $\widehat{G} = \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ および $\widehat{H} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ で与えられる．また θ は上述の式と同じ式で定義される $\widehat{G}$ の外部自己同型 $\hat{\theta}$ を誘導するが[*3]，このとき $\widehat{H}$ は $\widehat{G}$ の $\hat{\theta}$ 固定部分と自然に同一視できる．

この双対群の埋め込みを経由することで，$\mathbf{H}$ の半単純元の共役類の集合から，$\mathbf{G}$ の θ 半単純元の θ 共役類の集合への写像 $\mathcal{A}_{\mathbf{H}/\mathbf{G}}$ が定義できる[*4]．$h \in H$ が $g \in G$ の**ノルム**であるとは，h が強正則半単純かつ g が強 θ 正則 θ 半単純で，$\mathcal{A}_{\mathbf{H}/\mathbf{G}}(h) = g$ となることをいう．今回は $h \in H$ が $g \in G$ のノルムであることは次と同値となる：h の固有値の集合を $\{t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}, 1\}$ としたとき，$g\theta(g)$ の固有値の集合が $\{t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}\}$ となる．

次の定理が Arthur の局所分類定理（エンドスコピー持ち上げの存在）である．

定理 1.1 ([Art13, Theorem 2.2.1])**.** π_H を H の既約緩増加表現とする．このとき，

- H の既約緩増加表現の有限集合 Π_H で π_H を含むもの（H の **L パケット**と呼ばれる），
- G の既約緩増加表現 π で θ 安定なもの（π_H および Π_H の**エンドスコピー持ち上げ**と呼ばれる）

の組であって，次の等式（**エンドスコピー指標関係式**）を満たすものが一意的に存在する：

$$\Theta_{\pi,\theta}(g) = \sum_{\pi' \in \Pi_H} \Theta_{\pi'}(h).$$

但し $\Theta_{\pi'}$ は π' の指標，$\Theta_{\pi,\theta}$ は π の θ で捻られた指標[*5]であり，$h \in H$ は $g \in G$ のノルムである．

注意 1.2. 他の準分裂型古典群でもエンドスコピー持ち上げの主張自体は同じであるが，エンドスコピー指標関係式はもっと複雑な形をとる．具体的には，まず右辺の h として g のノルムの安定共役類に関する和をとらなくてはならない．また指標値 $\Theta_{\pi'}(h)$ には Weyl 判別式および**トランスファーファクター**と呼ばれる (g, h)

[*2] 正確にはこのような双対群の間の埋め込みはそもそもエンドスコピー群の定義の中に組み込まれている．また一般には双対群に Galois 作用の情報も付加した **L 群**を考える必要がある．これらの詳細かつ一般的な定義は [KS99, 2.1] などを参照．

[*3] 正確には $\hat{\theta}$ は，$\mathbf{G}$ および $\widehat{G}$ の splitting を固定した上ではじめて定まる（詳細は [KS99, 1.2] 参照）．今回は splitting として上三角行列からなる Borel 部分群と，対角行列からなる極大トーラスと，成分が 1 からなるルートベクトルを暗にとっている．

[*4] $xg\theta(x)^{-1}$ の形の元は g に θ 共役であるという．以下登場する「θ 半単純性」や $\mathcal{A}_{\mathbf{H}/\mathbf{G}}$ などの定義は [KS99] の 3 章を参照．

[*5] θ 安定な表現に対して定義される，通常の指標の変種である．厳密には定数倍の不定性があるため，正規化を暗に固定している．

に依存した係数がつく（これらの定義は [KS99] の 4 章を参照されたい）．今回のケースでは Weyl 判別式およびトランスファーファクターの自明性がすくなくとも Waldspurger などにはよく知られており，ノルムの安定共役類が高々一元から成ることが容易に分かるため，上述の形に簡略化できる（詳しくは [Oi16a] を参照）．

注意 1.3. エンドスコピー持ち上げと局所 Langlands 対応の関係は以下に述べる通りである．π に対応する G の L パラメータを ϕ，Π_H に対応する H の L パラメータを ϕ_H とする．L パラメータとは局所 Langlands 群 $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ から双対群（正確には L 群）への準同型であって，いくつかの条件を満たすものであったが，ϕ_H を上述の双対群の埋め込みを合成して G の L パラメータと見做したものは ϕ と一致している：

$$\begin{tikzcd}
\pi \arrow[r, leftrightsquigarrow, "\mathrm{GL}_{2n}(F)\text{ の LLC}"] & W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\phi_H"'] & \widehat{G} = \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \\
\Pi_H \arrow[rr, leftrightsquigarrow, "\mathrm{SO}_{2n+1}(F)\text{ の LLC}"] & & \widehat{H} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

正確には，この関係が成立することが $\mathbf{H}$ の局所 Langlands 対応の定式化（特徴付け）に他ならない．

2 単純超尖点表現

本節では単純超尖点表現と呼ばれる表現の定義を紹介する．この表現は一般の連結簡約群 $\mathbf{G}$ に対して定義できるが，簡単のために $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_{2n}$ に限って説明したい（一般の場合は [Oi16a] の 2 節を参照されたい）．

まず次のような G のコンパクト開部分群から成る列を考える[*6]：

$$I := \begin{pmatrix} \mathcal{O}_F^\times & & \mathcal{O}_F \\ & \ddots & \\ \mathfrak{p}_F & & \mathcal{O}_F^\times \end{pmatrix} \supset I^+ := \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}_F & & \mathcal{O}_F \\ & \ddots & \\ \mathfrak{p}_F & & 1+\mathfrak{p}_F \end{pmatrix} \supset I^{++} := \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}_F & \mathfrak{p}_F & & \mathcal{O}_F \\ & \ddots & \ddots & \\ & \mathfrak{p}_F & \ddots & \mathfrak{p}_F \\ \mathfrak{p}_F^2 & & & 1+\mathfrak{p}_F \end{pmatrix}.$$

少し詳しく説明をすると，I は還元写像による上三角行列の引き戻し，I^+ は還元写像による上三角冪単行列の引き戻しとなっている．また I^{++} は，I^+ の元であって，対角の一つ上の成分が $\mathfrak{p}_F$ に，一番左下の成分が $\mathfrak{p}_F^2$ に属するものから成る．実はこれらは正規部分群の列であり，商 I^+/I^{++} は $k_F^{\oplus 2n}$ と同型になっている．

次に G の部分群 $Z_G I^+$ の指標（$\mathbb{C}$ への準同型写像）η であって，I^+ への制限が $I^+/I^{++} \cong k_F^{\oplus 2n}$ を経由し，かつどの直和成分上でも非自明となるものを考える（このような指標を**アフィン生成的**と呼ぶ）．すると η の全体へのコンパクト誘導 $\text{c-Ind}_{ZI^+}^{G} \eta$ は既約超尖点表現の $2n$ 個の直和に分解し，1 の冪根の集合 μ_{2n} で自然に添え字付けられる．こうして得られる既約超尖点表現のことを，G の**単純超尖点表現**と呼ぶ．

注意 2.1. 特に中心指標が自明な G の単純超尖点表現の同型類は，以下のアフィン生成的指標 η_a（$a \in k_F^\times$）から出来る $\pi_{a,\zeta}$ によって代表されることが分かる：

$$\eta_a \colon Z_G I^+ \twoheadrightarrow I^+/I^{++} \cong k_F^{\oplus 2n} \to \mathbb{C}^\times;\ (g_{ij})_{ij} \mapsto \psi(\overline{g_{12}}, \ldots, \overline{g_{2n-1,2n}} + a\overline{\varpi_F^{-1} g_{2n,1}}),$$

$$\text{c-Ind}_{ZI^+}^{G} \eta_a \cong \bigoplus_{\zeta \in \mu_{2n}} \pi_{a,\zeta}.$$

[*6] これらは G のパラホリック部分群の Moy-Prasad フィルトレーションと呼ばれるものの一部である．こうした部分群およびフィルトレーションは一般には $\mathbf{G}$ の Bruhat-Tits ビルディングの点を一つ選ぶ毎に定まり，今回の $I \supset I^+ \supset I^{++}$ はビルディングの「小部屋の重心」に対応している．また I は**岩堀部分群**と呼ばれる極小パラホリック部分群になっている．

つまり同型類は有限集合 $k_F^\times \times \mu_{2n}$ によってパラメトライズされる（但し素元 ϖ_F と ψ_F には依存している）.

さて，これら単純超尖点表現のエンドスコピー持ち上げについて，以下の結果が成立している：

定理 2.2 ([Oi16], [Oi16a], [Oi16b])**.** $\mathbf{G}$ を F 上の一般線型群，$\mathbf{H}$ をそのエンドスコピー群とする．π_H を H の単純超尖点表現とし，Π_H を π_H を含む H の L パケット，π をその G へのエンドスコピー持ち上げとする．

(1) $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_{2n}$ および $\mathbf{H} = \mathrm{SO}_{2n+1}$ の場合，$\Pi_H = \{\pi_H\}$ で π もまた単純超尖点表現となる．

(2) $\mathbf{G} = \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_N$ [*7]および $\mathbf{H} = \mathrm{U}_{E/F}(N)$ の場合，$\Pi_H = \{\pi_H\}$ で π もまた単純超尖点表現となる．ここで，E/F は不分岐 2 次拡大，$\mathbf{H}$ はそれにともなうユニタリ群である．

(3) $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_{2n+1}$ および $\mathbf{H} = \mathrm{Sp}_{2n}$ の場合，Π_H は π_H の $(\mathrm{Sp}_{2n})_{\mathrm{ad}}(F)$ 軌道から成る 2 元集合となり，π は $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ の単純超尖点表現 π' とその中心指標 $\omega_{\pi'}$ のテンソル積 $\pi' \boxtimes \omega_{\pi'}$ の放物型誘導表現となる．

注意 2.3. 注意 2.1 で述べたように，単純超尖点表現の同型類は具体的な集合によってパラメトライズできる．この意味で定理のエンドスコピー持ち上げを完全に明示的に決定することもできる．

3 単純超尖点表現のエンドスコピー指標関係式

定理 2.2 で得られた組 (π, Π_H) は定理 1.1 の関係式を満たすはずである．本節では特定の元 $g \in G$ とそのノルム $h \in H$ を選んだ時に，エンドスコピー指標関係式がどのような形をとるかを見る．

一般に単純超尖点表現のようなコンパクト誘導で作られる超尖点表現には**指標公式**が存在し（有限群の誘導表現に対する **Frobenius 公式**の類似），与えられた元での指標値の計算は，その元に関する群論的な計算に帰着される．たとえば $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_{2n}$ の単純超尖点表現 $\pi_{a,\zeta}$（注意 2.1 参照）の場合に，この手法に則って

$$g_u := I_{2n} + \begin{pmatrix} 0 & I_{2n-1} \\ \varpi_F \cdot u & 0 \end{pmatrix}$$

という形の元での指標値を計算することを考える（但し $u \in \mathcal{O}_F^\times$）．この元は I^+ に属しており，更に $I^+/I^{++} \cong k_F^{\oplus 2n}$ への像のどの成分も消えていない．この性質に注目することで指標公式による計算を比較的簡単に実行することができ，指標値を以下のように **Kloosterman 和**を用いて記述することができる：

$$\Theta_{\pi_{a,\zeta}}(g_u) = \mathrm{Kl}^{2n}_{a\overline{u}}(\psi) := \sum_{\substack{x_1 \ldots, x_{2n} \in k_F^\times \\ x_1 \cdots x_{2n} = a\overline{u}}} \psi(x_1 + \cdots + x_{2n}).$$

実は一般の $\mathbf{G}$ についても，このような性質をもつ元 g_u での指標および捻られた指標は，群 $\mathbf{G}$ に応じた形で一般化された Kloosterman 和を用いて表せる．また g_u のノルム h_u も同様の性質をもつため，結果として

$$\mathbf{G} \text{ に応じた Kloosterman 和} = \mathbf{H} \text{ に応じた Kloosterman 和}$$

というタイプの等式がエンドスコピー指標関係式から得られることになる．この両辺を $\overline{u} \in k_F^\times$ の関数だと思い，$k_F^\times$ の乗法的指標 χ によって Fourier 変換することで **Gauss 和** $G(k_F; \chi, \psi)$ の等式が得られる（たとえば

$$\sum_{\overline{u} \in k_F^\times} \chi(\overline{u})\, \mathrm{Kl}^{2n}_{\overline{u}}(\psi) = G(k_F; \chi, \psi)^{2n}, \quad \text{但し } G(k_F; \chi, \psi) := \sum_{t \in k_F^\times} \chi(t)\psi(t)$$

[*7] これは F 上の一般線型群ではないが，1 節で説明した θ に Galois 共役を合成してできる自己同型を用いて同じ定式化ができる．この場合のエンドスコピー持ち上げおよび局所 Langlands 対応は，Mok によって（Arthur と同じ手法により）構成されている．

という等式を定義に従って確認できるが，この類の計算が一般化された Kloosterman 和に対してもできる).

さて以上の議論によって得られる Gauss 和の等式が，定理 2.2 の 3 つの例ではそれぞれどうなっているかを見よう．(1) の場合は両辺に全く同じものが出力されるためトートロジカルな等式になってしまうが，(2) および (3) の場合には見かけ上別種の Kloosterman 和が両辺に現れ，その乗法的指標 χ による Fourier 変換は

(2)
$$G(k_E;\chi\circ\mathrm{Nr}_{k_E/k_F},\psi\circ\mathrm{Tr}_{k_E/k_F})=-G(k_F;\chi,\psi)^2,$$

(3)
$$G(k_F;\chi^2,\psi)\cdot G(k_F;\omega,\psi)=\chi(4)\cdot G(k_F;\chi,\psi)\cdot G(k_F;\chi\omega,\psi),$$

という等式になる（但し ω は平方剰余指標)．実は (2) の等式は **Hasse-Davenport の持ち上げ関係式**，(3) の等式は **Hasse-Davenport の積関係式**と呼ばれる，古典的によく知られた（非自明な）等式である．

このような Kloosterman 和および Gauss 和に関する等式が得られたのは，エンドスコピー指標関係式を単純超尖点表現に対して計算したからであり，他の表現について計算すればまた別種の等式が得られると想像できる．エンドスコピー指標関係式の主張は抽象的で難しいが，実はこうした具体的で興味深い等式を色々エンコードしてそうだと言える．

注意 3.1. 本稿では恰も，エンドスコピー持ち上げに関する定理 2.2 がまず最初に証明され，その帰結として Hasse-Davenport の関係式が得られたかのように記述した．しかし実際の順序は逆であり，（エンドスコピー持ち上げがエンドスコピー指標関係式で特徴付けられている以上）まずエンドスコピー指標関係式を計算しなければならず，その際に Hasse-Davenport の関係式を用いるという手順を踏む．すなわち定理 2.2 は Hasse-Davenport の関係式の別証明を与えてはおらず，むしろ定理 2.2 の証明において Hasse-Davenport の関係式を使う必要が本質的にある．

参考文献

[Art13] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations, Orthogonal and symplectic groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[KS99] R. E. Kottwitz and D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque (1999), no. 255, vi+190.

[Oi16] M. Oi, *Endoscopic lifting of simple supercuspidal representations of* SO_{2n+1} *to* GL_n, preprint, arXiv:1602.03453, 2016.

[Oi16a] M. Oi, *Endoscopic lifting of simple supercuspidal representations of* $\mathrm{U}(N)$ *to* $\mathrm{GL}(N)$, preprint, arXiv:1603.08316, 2016.

[Oi16b] M. Oi, *Simple supercuspidal L-packets of* Sp_{2n} *and their endoscopic liftings to* GL_{2n}, in preparation.

[伊藤] 伊藤哲史, 局所 Langlands 対応の幾何的構成, 第 21 回整数論サマースクール「p 進簡約群の表現論入門」報告集, 2014.

[三枝] 三枝洋一, $\mathrm{GL}(n)$ の局所ラングランズ対応, 第 21 回整数論サマースクール「p 進簡約群の表現論入門」報告集, 2014.